DEUSTO CCM SEMINAR

SOLUCIONES DE VISCOSIDAD TEORÍA y APLICACIONES

Juan J. Manfredi
Universidad de Pittsburgh

27 de Junio, 2025

Plan de la charla

1. **Soluciones de viscosidad: Definición y primeras cuestiones**
2. **Jets y el Teorema de las Sumas**
3. **El caso $p = 2$ via Aclopamientos**
4. **The case $p = 2$ via Ishii-Lions**
5. **El caso $p \neq 2$ via Acoplamientos**
6. **The case $p \neq 2$ via Ishii-Lions**

Soluciones de viscosidad I

Consideremos una ecuación de la forma

$$F(x, \nabla u, D^2 u) = f(x),$$

donde F y f son funciones continuas de todos sus argumentos.
• La ecuación es elíptica si F es decreciente en la variable $D^2 u$; es decir que si $Y \leq X$ se cumple

$$F(x, \xi, X) \leq F(x, \xi, Y)$$

• Ejemplo fundamental:

$$-\Delta u = f, \qquad\qquad F(x, \xi, X) = -\mathrm{trace}(X)$$

• Ejemplo degenerado:

$$\Delta_\infty u = -\langle D^2 u \nabla u, \nabla u \rangle = f(x), \qquad\qquad F(x, \xi, X) = -\langle X \cdot \xi, \xi \rangle.$$

Soluciones de viscosidad II

Supongamos que se cumple el principio de comparación:

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) \leq f(x)$$
$$F(x, D\phi(x), D^2\phi(x)) \geq f(x)$$
$$u \leq \phi \text{ en } \partial\Omega$$

implica que

$$u \leq \phi \text{ en } \Omega$$

Supongamos que

$$\max\{u(y) - \phi(y) \colon y \in \Omega\} = u(y_0) - \phi(y_0) > 0.$$

Entonces si sabemos que

$$F(y_0, Du(y_0), D^2u(y_0)) \leq f(y_0)$$

se tiene que

$$F(y_0, D\phi(y_0), D^2\phi(y_0)) < f(y_0)$$

Soluciones de viscosidad III

- Una función u.s.c. u es una subsolución de viscosidad en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si para cualquier $\phi \in C^2(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo local en x_0 se cumple:

$$F(x_0, \nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq f(x_0).$$

Si $\phi(x_0) = u(x_0)$, esto equivale a decir que ϕ toca a u por arriba en x_0.

- Una función l.s.c. v es una supersolución de viscosidad en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si para cualquier $\phi \in C^2(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ tal que $v - \phi$ tiene un mínimo local en x_0 se cumple:

$$F(x_0, \nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq f(x_0).$$

Si $\phi(x_0) = v(x_0)$, esto equivale a decir que ϕ toca a v por abajo en x_0.

Existencia y Unicidad de soluciones

• Existencia: "Añadiendo viscosidad". Consideremos el problem de Dirichlet

$$\begin{cases} -\epsilon\,\Delta u(x) + F(x, u(x), Du(x), D^2 u(x)) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u(x) &= g(x) \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Esta ecuación es uniformemente elíptica. Llámemos a su solución u_ϵ. ¿Qué podemos decir del límite $\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon$?

• Unicidad: Esta noción de solución es importante porque hay ecuaciones muy generales para las cuales el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} F(x, u(x), Du(x), D^2 u(x)) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u(x) &= g(x) \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solucion en el sentido de viscosidad.

Este es un resultado profundo que se debe a Robert Jensen, Itoshi Ishii, Pierre-Louis Lions, Michael Crandal, and others.

La unicidad se prueba usando el Teorema de las Sumas que veremos mas adelante.

Soluciones de Viscosidad - Preguntas Simples

Pregunta 1: Suma de subsoluciones de una ecuación lineal

Sean u_1 y u_2 dos subsoluciones de viscosidad de $-\Delta u = 0$ en Ω. Demuestrar que $\frac{u_1+u_2}{2}$ es una subsolución de viscosidad de $-\Delta u = 0$ en Ω.

Enfoque ingenuo: Supongamos que $u_1(x) + u_2(x) - \phi(x)$ tiene un máximo local en x_0 entonces . . . ?

En $\mathbb{R}^n$ esto es cierto para la clase general de ecuaciones cóncavas (Teorema 5.8 en el libro de Caffarelli-Cabré). La prueba se basa en la desigualdad de Aleksandrov-Bakelman-Pucci, que hasta donde yo sé solo se conoce en el caso Euclídeo,

Soluciones de Viscosidad - Preguntas Simples

Recordemos el operador Laplaciano Infinito

$$-\Delta_\infty u = -\langle D^2 u \, \nabla u, \nabla u \rangle = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Pregunta 3: Superposición de subsoluciones en variables disjuntas

Sea $u_1(x)$ una subsolución de viscosidad de $-\Delta_\infty u = 0$ en $\mathbb{R}^m$.
Sea $u_2(y)$ una subsolución de viscosidad de $-\Delta_\infty u = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $u_1(x) + u_2(y)$ es una subsolución de viscosidad de $-\Delta_\infty u = 0$ en $\mathbb{R}^{m+n}$.

Esto ciertamente es válido cuando tanto u_1 como u_2 son suaves.
Supongamos que $u_1(x) + u_2(y) - \phi(x, y)$ tiene un máximo local en (x_0, y_0). Entonces... ¿?

Soluciones de Viscosidad - Preguntas Simples

Pregunta 2: Superposición de subsoluciones en variables disjuntas

Sea $u_1(x)$ una subsolución de viscosidad de $-\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^m$. Sea $u_2(y)$ una subsolución de viscosidad de $-\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestrar que $u_1(x) + u_2(y)$ es una subsolución de viscosidad de $-\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^{m+n}$.

Ciertamente este es el caso cuando tanto u_1 como u_2 son suaves. Supongamos que $u_1(x) + u_2(y) - \phi(x, y)$ tiene un máximo local en (x_0, y_0) entonces ... ¿?

Soluciones de Viscosidad - Preguntas Simples

Recuerda el operador Laplaciano Infinito

$$-\Delta_\infty u = -\langle D^2 u \,\nabla u, \nabla u\rangle = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Pregunta 3: Superposición de subsoluciones en variables disjuntas

Sea $u_1(x)$ una subsolución de viscosidad de $-\Delta_\infty u = 0$ en $\mathbb{R}^m$.
Sea $u_2(y)$ una subsolución de viscosidad de $-\Delta_\infty u = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestra que $u_1(x) + u_2(y)$ es una subsolución de viscosidad de $-\Delta_\infty u = 0$ en $\mathbb{R}^{m+n}$.

Esto ciertamente es válido cuando tanto u_1 como u_2 son suaves.
Supongamos que $u_1(x) + u_2(y) - \phi(x, y)$ tiene un máximo local en (x_0, y_0). Entonces...
¿?

Soluciones de Viscosidad, Superposición

• Juutinen-Lindqvist-M (2001) afirmaron que la superposición de subsoluciones de $-\Delta_\infty u = 0$ en variables disjuntas es una subsolución, sin reflexionar profundamente al respecto.

• Este hecho fue utilizado por Lindgren (2014) para demostrar que las soluciones de la ecuación no homogénea $-\Delta_\infty u = f$ con f acotada y continua son Lipschitz continuas.

• G. Hong y X. Feng (2018) probaron que la superposición de subsoluciones de $-\Delta_\infty u = 0$ en variables disjuntas es una subsolución **si una de las funciones es suave. Además, proporcionaron un contraejemplo explícito en caso contrario.**

Teorema

(Liu-M-Zhou, 2023) La superposición de ∞-subsoluciones de viscosidad en variables disjuntas es una ∞-subsolución de viscosidad.

Soluciones de Viscosidad, Superposición

Hong y Feng construyeron dos funciones u_1 y u_2 de una variable tales que:

- Siempre que una función de prueba ϕ toca u_1 por encima en 0, se cumple que $-\Delta_\infty \phi(0) > 1$.
- Siempre que una función de prueba ϕ toca u_2 por encima en 0, se cumple que $-\Delta_\infty \phi(0) > 1$.
- Existe una función de prueba ϕ que toca $u_1 + u_2$ por encima en 0 y se cumple que $-\Delta_\infty \phi(0) < 2$.

Explicación

La definición de subsoluciones de viscosidad requiere que u_1 y u_2 sean subsoluciones en **conjuntos abiertos** que contienen al 0, no solo en un punto.

Soluciones de Viscosidad – Super-Jets

Definición (Super-jet)

Sea u una función semicontinua superior definida en un dominio Ω. Sea $x_0 \in \Omega$.El par $(\xi, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$ es un super-jet de u en x_0 si

$$u(x_0 + h) \leq u(x_0) + \langle \xi, h \rangle + \frac{1}{2}\langle X \cdot h, h \rangle + o(|h|^2), \text{ cuando } h \to 0$$

El conjunto de todos estos pares se denota $J^{2,+}(u, x_0)$.

El conjunto $J^{2,+}(u, x_0)$ podría ser vacío o contener infinitos elementos. Si $u \in C^2(\Omega)$, entonces tenemos

$$J^{2,+}(u, x_0) = \{(\nabla u(x_0), D^2 u(x_0))\}.$$

El conjunto $\overline{J}^{2,+}(u, x_0)$ (**clausura de** $J^{2,+}(u, x_0)$) consiste en pares (ξ, X) tales que existen puntos $x_n \to x_0$, vectores $\xi_n \to \xi$ y matrices $X_n \to X$ de modo que $(\xi_n, X_n) \in J^{2,+}(u, x_n)$.

Soluciones de Viscosidad - Sub-Jets

Definición (Sub-jet)

Sea u una función semicontinua inferior definida en un dominio Ω. Sea $x_0 \in \Omega$. El par $(\xi, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$ es un sub-jet de u en x_0 si

$$u(x_0 + h) \geq u(x_0) + \langle \xi, h \rangle + \frac{1}{2}\langle X \cdot h, h \rangle + o(|h|^2) \text{ cuando } h \to 0.$$

El conjunto de todos estos pares se denota $J^{2,-}(u, x_0)$.

El conjunto $J^{2,-}(u, x_0)$ podría ser vacío o contener infinitos elementos. Si $u \in C^2(\Omega)$, entonces tenemos

$$J^{2,-}(u, x_0) = \{(\nabla u(x_0), D^2 u(x_0))\}.$$

El conjunto $\overline{J}^{2,-}(u, x_0)$ es la clausura de $J^{2,-}(u, x_0)$ en el sentido definido anteriormente

Soluciones de Viscosidad - Jets

- Si $J^{2,+}(u,x_0) \cap J^{2,-}(u,x_0) \neq \emptyset$ entonces contiene un único elemento (ξ, X). En este caso, decimos que u es diferenciable de segundo orden en el punto x_0 y escribimos

$$u(x_0) = \xi \text{ and } D^2(x_0) = X.$$

- Si $\phi \in C^2(\Omega)$ es tal que $u - \phi$ alcanza un máximo en $x_0 \in \Omega$, entonces tenemos

$$(\nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \in J^{2,+}(u,x_0).$$

Lema (Problema para un curso de Análisis Matemático)

Consideremos funciones de prueba $\phi \in C^2(\Omega)$. Se tiene

$$J^{2,+}(u,x_0) = \left\{(\nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S} \colon u - \phi \textit{ has a max. at } x_0\right\}$$

En otras palabras, el par $(\xi, X) \in J^{2,+}(u,x_0)$ si y solo si existe una función $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo en x_0, $\nabla\phi(x_0) = \xi$ y $D^2\phi(x_0) = X$.

Soluciones de Viscosidad - Definición usando Jets

Consideremos una ecuación elíptica degenerada (F decreciente en la variable D^2u)

$$F(x, \nabla u, D^2 u) = f(x),$$

donde f es continua. Recordemos los ejemplos básicos:

$$-\Delta u = f \text{ and } -\Delta_\infty u = \langle D^2 u \nabla u, \nabla u \rangle = f(x).$$

- Una función semicontinua superior u es una subsolución de viscosidad en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si para todo $x_0 \in \Omega$ y superjet $(\xi, X) \in \bar{J}^{2,+}(u, x_0)$ en x_0 se cumple que

$$F(x_0, \xi, X) \leq f(x_0).$$

- Una función semicontinua inferior u es una supersolución de viscosidad en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si para todo $x_0 \in \Omega$ y subjet $(\xi, X) \in \bar{J}^{2,-}(u, x_0)$ en x_0 se cumple que

$$F(x_0, \xi, X) \geq f(x_0).$$

Doblado de Variables

Sean u_1 y u_2 funciones suaves en dominios $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ y $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ respectivamente. Sea $\phi \in C^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tal que $u_1(x) + u_2(y) - \phi(x, y)$ tiene un máximo local en el punto (x_0, y_0). Se tiene:

- $\nabla u_1(x_0) = \nabla_x \phi(x_0, y_0)$, $\nabla u_2(y_0) = \nabla_y \phi(x_0, y_0)$
- $(\nabla_x \phi(x_0, y_0), D^2 u_1(x_0)) \in J^{2,+}(u_1, x_0)$
- $(\nabla_y \phi(x_0, y_0), D^2 u_2(y_0)) \in J^{2,+}(u_2, y_0)$
- $\begin{pmatrix} D^2 u_1(x_0) & 0 \\ 0 & D^2 u_2(y_0) \end{pmatrix} \leq D^2 \phi(x_0, y_0)$

Observación

La herramienta clave en la teoría de soluciones de viscosidad es una generalización de estas relaciones cuando las funciones son solo semicontinuas.

Soluciones de Viscosidad, Teorema de las Sumas

Teorema (Teorema de las Sumas, Crandall-Jensen-Ishii-Lions, 1992))

Sean u_1 y u_2 functions semi-continuas superior en dominios $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ y $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ respectivamente. Sea $\phi \in C^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tal que

$$u_1(x) + u_2(y) - \phi(x, y)$$

tiene un máximo local en el punto (x_0, y_0). Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existen matrices simétricas $X^\epsilon \in \mathcal{S}^m$, $Y^\epsilon \in \mathcal{S}^n$ tales que:

- $(\nabla_x \phi(x_0, y_0), X^\epsilon) \in \bar{J}^{2,+}(u_1, x_0)$
- $(\nabla_y \phi(x_0, y_0), Y^\epsilon) \in \bar{J}^{2,+}(u_2, y_0)$
- $-\left(\frac{1}{\epsilon} + \|A\|\right) I \leq \begin{pmatrix} X^\epsilon & 0 \\ 0 & Y^\epsilon \end{pmatrix} \leq A + \epsilon A^2,$

donce $A = D^2\phi(x_0, y_0)$.

Soluciones de Viscosidad, Teorema de las Sumas

Nota

- El teorema tambien se cumple para una suma finita $u_1 + \ldots + u_m$
- Es un teorema profundo que usa herramientas de análisis convexo y convolutions con supremo e ínfimo.
- El teorema se generaliza a variedades riemanianas y sub-riemanianas.
- Para la mayoría de la aplicaciones, solo se usa la cota superior.
- De hecho, si u y v son sub-soluciones de una ecuación uniformemente elíptica podemos eliminar el término con ϵ^2 y se tiene

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq A = D^2\phi(x_0, y_0)$$

Esta observación se debe Porreta and Priola (2013) y ha sido generalizada a una clase general de ecuaciones que incluyen las ecuaciones fuertemente no lineales por Maienshein (2024)

El Principio de Comparación para Funciones Semi-Continuas

Ejemplo

Consideremos $u_1 = u$ *and* $u_2 = -v$. *Por tanto* v *es seminconinua inferior y*

$$\overline{J}^{2,-}(v, y) = -\overline{J}^{2,+}(-v, y).$$

Consideremos la función de penalización

$$\phi(x, y) = \frac{\alpha}{2}|x - y|^2,$$

$\alpha > 0$. *Supongamos que* $u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$ *tiene un máximo local en el punto* (x_α, y_α). *Se tiene*

$$\nabla_x \phi(x_\alpha, y_\alpha) = -\nabla_y \phi(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha(x_\alpha - y_\alpha),$$

$$A = D^2\phi(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}, A^2 = 2\alpha A, \|A\| = 2\alpha.$$

El Principio de Comparación para Funciones Semi-Continuas, II

Ejemplo

Se deduce del Teorema de las Sumas que para todo $\varepsilon > 0$ *existen matrices* X^ε, Y^ε *tales que*

$$(\alpha(x_\alpha - y_\alpha), X^\varepsilon) \in \overline{J}^{2,+}(u, x_\alpha), (\alpha(x_\alpha - y_\alpha), -Y^\varepsilon) \in \overline{J}^{2,-}(v, y_\alpha),$$

y

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\alpha\right)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X^\varepsilon & 0 \\ 0 & -Y^\varepsilon \end{pmatrix} \leq \alpha(1 + 2\varepsilon\alpha)\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

Eligiendo $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ *obtenemos*

$$-3\alpha\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X^\varepsilon & 0 \\ 0 & -Y^\varepsilon \end{pmatrix} \leq 3\alpha\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

El Principio de Comparación para Funciones Semi-Continuas, III

Ejemplo

Aplicando esta desigualdad al vector columna $(\xi, \xi)^T$ *obtenemos*

$$-\frac{6}{\varepsilon}|\xi|^2 \leq \langle X^\varepsilon \xi, \xi \rangle - \langle Y^\varepsilon \xi, \xi \rangle \leq 0,$$

de dónde se concluye que en los puntos (x_α, y_α) *de máximo de*

$$u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$$

tenemos

- $\lim_{\alpha \to \infty}(x_\alpha, y_\alpha) = (x_0, y_0) = \mathrm{Arg}(\max\{u(x) - v(x)\})$
- *las derivadas primeras generalizadas de* u *en* x_α *y* v *en* y_α *coinciden*
- *las derivadas segundas generalizadas satisfacen* $X^\varepsilon \leq Y^\varepsilon$.

Camino Aleatorios con paso ε

- Sea Ω un dominio acotado con frontera Lipschitz en $\mathbb{R}^n$.
- Sea $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ una funciónLipschitz.
- Fijemos $\varepsilon > 0$.
- Comenzamos en el punto $x_0 \in \Omega$.
- Elegimos $x_1 \in B_\varepsilon(x_0)$ al azar.
- Elegimos $x_n \in B_\varepsilon(x_{n-1})$ at azar.

Obtenemos una sucesión $x_0, x_1, \dots, x_n \dots$. Definamos el tiempo de salidad

$$\tau = \inf\{k\colon x_k \notin \Omega\}.$$

Se deduce que $x_{k-1} \in \Omega$, that $B_\varepsilon(x_{k-1}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset$ y que $x_\tau \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.
En la teoría de la probabilidad se prueba que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

¿Cual es la esperanza o valor medio de $f(x_\tau)$?

Definamos $u_\varepsilon(x_0) = \mathbb{E}[f(x_\tau)]$

Principio de Progamación Dinámica

Extendamos u_ε to $\mathbb{R} \setminus \Omega$ definiendo $u_\varepsilon(x) = f(x)$ cuando $x \notin \Omega$.

DPP

La función u_ε satisface

$$u_\varepsilon(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon(z)\, dz := \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon(z)\, dz.$$

Proposición (Folclore)

El límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x) = u(x)$$

existe y es uniforme en $\bar{\Omega}$. El límite u es la solución única de problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Acoplamientos

Si probamos estimaciones para u_ε independiente de ε, obtenemos estimaciones para u.

Doblado de variables:

$$
\begin{aligned}
G(x,y) := u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y) &= \fint_{B_\varepsilon(0)} u_\varepsilon(x+h)\,dh - \fint_{B_\varepsilon(0)} u_\varepsilon(y+h)\,dh \\
&= \fint_{B_\varepsilon(0)} u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(y+P_{x,y}(h))\,dh \\
&= \fint_{B_\varepsilon(0)} G(x+h, y+P_{x,y}(h))\,dh,
\end{aligned}
$$

donde tenemos la libertad de elegir $P_{x,y}$ isometría de la bola $B_\varepsilon(0)$.
La regularidad de u_ε se convierte en estimar el tamaño de la solución G del PPD en dimensión $2n$ en $\Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Acoplamientos, II

Intrepretación Estocástica como Motivación

Consideremos un proceso estocástico en $\mathbb{R}^{2n}$ definido com sigue: Cuando el proceso está en el punto $(x_k, y_k) \in \Omega \times \Omega$, el punto x_{k+1} se elige al azar en la bola $B_\varepsilon(x_k)$ y el punto y_{k+1} se elige de tal modo que $P_{x,y}(y_{k+1})$ se distribuye uniformemente en la bola $B_\varepsilon(y_k)$)

Observemos que $G = 0$ en la diagonal

$$T = \{(x, y) : x = y\}.$$

Definimos un tiempo de parada y una función de pago como sigue:

1. El proceso termina cuando alcanzamos la diagonal T y el pago es zero.
2. El proceso termina si x_k o y_k se salen de la bola $B_1 \subset \Omega$, y el pago es $2 \sup |u_\varepsilon|$

Sea $v(x, y)$ el valor de este proceso. Se tiene que v y G verifican el mismo PDD y como $v \geq G$ en la frontera, $v \geq G$ en el interior.

Acoplamiento por Reflexión

• Para obtener una buena cota superior para $v(x, y)$ tenemos que elegir $P_{x,y}(h)$ de forma adecuada.
• Cuando intentamos acercarnos a T, un buena elección de $P_{x,y}(h)$ es la reflexión de h con respecto al hiperplano $V^{\perp} = \text{span}(x - y)^{\perp}$. Eligiendo $P_{x,y}(h) = h$, no ganamos nada.

Prueba Analítica

Find a supersolution $F(x, y)$ to the DPP satisfied by $G(x, y)$ with larger boundary values and use the comparison principles for DPPs.

Let $0 < \delta < 1$ and $C >$ a constant. Set

$$F(x, y) = C\,|x - y|^{\delta} + \text{small modifications}$$

• We want to show that $G \leq F$ in $B_1 \times B_1$.

Prueba Analítica

- Suppose that

$$\max_{B_1 \times B_1} (G(x,y) - F(x,y)) = G(x_0, y_0) - F(x_0, y_0) = \theta > 0.$$

- We have

$$\begin{cases} F(x,y) + \theta & \geq & G(x,y) \text{ in } B_1 \times B_1 \\ F(x_0,y_0) + \theta & = & G(x_0,y_0). \end{cases}$$

- By the monotonicity of the $2n$-DPP to obtain

$$\begin{array}{rcl} \theta & = & G(x_0,y_0) - F(x_0,y_0) \\ & = & \fint_{B_\varepsilon(0)} G(x_0 + h, y_0 + P_{x_0,y_0}(h))\, dh - F(x_0,y_0) \\ & \leq & \fint_{B_\varepsilon(0)} F(x_0 + h, y_0 + P_{x_0,y_0}(h))\, dh + \theta - F(x_0,y_0). \end{array}$$

Analytic Proof, II

Contradiction with the lemma:

Lemma

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} F(x_0 + h, y_0 + P_{x_0,y_0}(h))\, dh - F(x_0, y_0) < 0.$$

We conclude that $G(x, y) \leq F(x, y)$ so that u is δ-Hölder continuous.

Ishii-Lions, I

Teorema (Ishii-Lions method)

Let $u \in C(\overline{B}_1(0))$ be a continuous viscosity solution to $\Delta u = 0$. Then for $\delta \in (0,1)$ there is $C > 0$ such that

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x-y|^{\delta} \text{ for all } x, y \in B_{1/4}(0).$$

- WLOG $0 \leq u \leq 1$.
- Choose $z_0 \in B_{1/4}$ and set

$$\overline{F}(x,y) := F(x,y) + 2\,|x - z_0|^2 := C\,|x-y|^{\delta} + 2\,|x-z_0|^2,$$

where the purpose of the second term is to guarantee an interior maximum.

- Suppose that there is $\theta > 0$ and $x_0, y_0 \in B_1$ such that

$$u(x_0) - u(y_0) - \overline{F}(x_0,y_0) = \sup_{(x,y)\in\overline{B}_1\times\overline{B}_1} (u(x) - u(y) - \overline{F}(x,y)) = \theta > 0.$$

- $x_0 \neq y_0$.

IL Method, II

- Also $(x_0, y_0) \notin \partial(B_1 \times B_1)$ since if $(x_0, y_0) \in \partial(B_1 \times B_1)$

$$c(n)\,|x_0 - y_0|^\delta + 2\,|x_0 - z_0|^2 \geq 4,$$

for some constant $c(n)$.

- Use the Theorem on Sums:

$$(D_x F(x_0, y_0), X) \in \overline{J}^{2,+}(u(x_0) - 2\,|x_0 - z_0|^2),$$
$$(-D_y F(x_0, y_0), Y) \in \overline{J}^{2,-} u(y_0)$$
$$(D_x f(x_0, y_0) + 4(x_0 - z_0), X + 4I) \in \overline{J}^{2,+} u(x_0),$$
$$(-D_y F(x_0, y_0), Y) \in \overline{J}^{2,-} u(y_0),$$

with the estimate

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq D^2 F(x_0, y_0).$$

IL, III

- Compute:

$$D^2F(x_0, z_0) = \begin{pmatrix} M & -M \\ -M & M \end{pmatrix},$$

where

$$M = C\,\delta\,|x_0 - y_0|^{(\delta-2)}\left((\delta-2)\frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|} \otimes \frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|} + I\right)$$

Set $\eta = \frac{x_0-y_0}{|x_0-y_0|}$ and $P = \eta \otimes \eta$, so that

$$M = C\,\delta\,|x_0 - y_0|^{\delta-2}\left((\delta-2)P + I\right).$$

IL, IV

• The quadratic from determined by $D^2F(x_0, z_0)$ vanishes on the diagonal $\left(\xi, \xi\right)$, which implies $X \leq Y$.

• Use $\left(\xi, -\xi\right)$ in the Theorem of Sums, to obtain

$$\langle X\xi, \xi\rangle - \langle Y\xi, \xi\rangle \leq 4\,\langle M\xi, \xi\rangle\,.$$

Next, we observe that

$$\begin{aligned} &4\left\langle M\frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|}, \frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|}\right\rangle \\ =&\,,\,C\delta\left|x_0 - y_0\right|^{\delta-2}(\delta - 2 + 1) \\ \leq&\,4\,C\delta\left|x_0 - y_0\right|^{\delta-2}(\delta - 1) < 0 \end{aligned}$$

IL, V

- The eigenvalues of $X - Y$ are non-negative
- At least one of the eigenvalues of $X - Y$ is smaller than

$$4\, C\delta \left|x_0 - y_0\right|^{\delta-2} (\delta - 1)$$

.

- For $C > 0$ large enough,

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{tr}(X + 4I) - \mathrm{tr}(Y) &\leq 4n + 4\, C\delta \left|x_0 - y_0\right|^{\delta-2} (\delta - 1) \\ &\leq 4n + 4\, C\delta 2^{\delta-2}(\delta - 1) < 0, \end{aligned}$$

a contradiction.

Relación con Acoplamientos

- Assume that all functions are smooth. The reflection $P_{x,y}$ is given by

$$P_{x,y}(h) := \left(I - 2\frac{x-y}{|x-y|} \otimes \frac{x-y}{|x-y|} \right)$$

Recall $G(x,y) = u(x) - u(y)$. From the expression

$$D^2 G(x,y) = \begin{pmatrix} D^2_{xx} u(x) & 0 \\ 0 & -D^2_{yy} u(y) \end{pmatrix}$$

we deduce

$$\operatorname{tr}\left\{ \begin{pmatrix} I & B \\ B^T & I \end{pmatrix} D^2 G(x,y) \right\} = 0$$

for an arbitrary matrix B. From one equation, we get many equations. We will choose B satisfying the additional condition

$$\begin{pmatrix} I & B \\ B^T & I \end{pmatrix} \geq 0.$$

Relación con Acoplamientos, II

Set $w = G - F$.

- $D^2 w(x_0, y_0) = D^2 G(x_0, y_0) - D^2 F(x_0, y_0) \leq 0$ implies

$$\operatorname{tr}\left\{ \begin{pmatrix} I & B \\ B^T & I \end{pmatrix} D^2 w(x_0, y_0) \right\} \leq 0,$$

- We have

$$0 \leq \operatorname{tr}\left\{ \begin{pmatrix} I & B \\ B^T & I \end{pmatrix} D^2 F(x_0, y_0) \right\}.$$

- If we can find a positive definite matrix B such that

$$\operatorname{tr}\left\{ \begin{pmatrix} I & B \\ B^T & I \end{pmatrix} D^2 F(x_0, y_0) \right\} < 0$$

we would get a contradiction.

- Answer: $B = I - P_{x,y}$ works.

Estimaciones de Cordes

Let $A(x)$ be a measurable matrix function such that

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x).\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, where $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.
The same approach gives Hölder regularity for solutions of the equation

$$\mathrm{trace}(A(x)\, D^2 u) = 0,$$

whenever

$$1 \leq \frac{\Lambda}{\lambda} \leq 1 + c.$$

Juegos de Tira y Afloje de paso ε con ruido

- Let Ω be a bounded Lipschitz domain in $\mathbb{R}^n$.
- Let $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ be a Lipschitz function.
- Fix $\varepsilon > 0$.
- Start at a point $x_0 \in \Omega$.
- Choose $\alpha, \beta > 0$ such that $\alpha + \beta = 1$.
- With probability α, there are two players, I and II, who flip a coin. The winner chooses $x_1 \in B_\varepsilon(x_0)$.
- With probability β choose $x_1 \in B_\varepsilon(x_0)$ at random.
- Choose $x_n \in B_\varepsilon(x_{n-1})$ following the same receipt.

We obtain a sequence $x_0, x_1, \ldots, x_n \ldots$. Define

$$\tau = \inf\{k\colon x_k \notin \Omega\}.$$

It follows that $x_{k-1} \in \Omega$, that $B_\varepsilon(x_{k-1}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset$ and that $x_\tau \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.
It is a probability fact that $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

What is the expected value of $f(x_\tau)$?

Dynamic Programming Principle

DPP

The function u_ε satisfies

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{2}\left\{\sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon\right\} + \beta \fint_{B_\varepsilon(0)} u_\varepsilon(x+h)\,dh,$$

Theorem

The limit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = u(x)$$

exists and it is uniform in x. Morever, the limit u is the only solution to the Dirichlet problem

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ε-Tug-of-war, II

Here $p > 2$ and $\alpha = \frac{p-2}{n+p}, \beta = \frac{n+2}{n+p}$. We look for a DPP in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left\{ \sup_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_\varepsilon \right\} + \beta \fint_{B_\varepsilon(0)} u_\varepsilon(x+h)\, dh \\
&\quad - \frac{\alpha}{2}\left\{ \sup_{B_\varepsilon(y)} u_\varepsilon + \inf_{B_\varepsilon(y)} u_\varepsilon \right\} - \beta \fint_{B_\varepsilon(0)} u_\varepsilon(y+h)\, dh \\
&= \frac{\alpha}{2}\left\{ \sup_{B_\varepsilon(x)\times B_\varepsilon(y)} G + \inf_{B_\varepsilon(x)\times B_\varepsilon(y)} G \right\} \\
&\qquad + \beta \fint_{B_\varepsilon(0)} G(x+h, y+P_{x,y}(h))\, dh.
\end{aligned}$$

Coupling

If we prove estimates for u_ε independent of ε, we get estimates for u.

Again, we have the freedom of choosing $P_{x,y}$ as any isometry of $B_\varepsilon(0)$.
The regularity of u_ε is converted into a question about the *size* of a solution G of the above $2n$-dimension DPP in $\Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Analytic Proof

Find a supersolution $F(x, y)$ to the DPP satisfied by $G(x, y)$ with larger boundary values and use the comparison principles for DPPs.

Let $0 < \delta < 1$ and $C >$ a constant. Set

$$F(x, y) = C\,|x - y|^{\delta} + \text{small modifications}$$

- F is a strict supersolution of the $2n$-DPP and we have $G \leq F$ in $B_1 \times B_1$.

[Luiro-Parviainen, 18]

The p-Laplacian

- Write the p-Laplacian in non-divergence form:

$$\Delta_p^N u = \Delta u + (p-2)\left\langle D^2 u \frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right\rangle$$
$$= \operatorname{tr}\left\{\left(I + (p-2)\left(\frac{Du}{|Du|} \otimes \frac{Du}{|Du|}\right)\right) D^2 u\right\} = 0.$$

- Want to prove

$$u(x) - u(y) \le F(x,y) = C\,|x-y|^{\delta},$$

- Suppose

$$\max_{\overline{B}_1 \times \overline{B}_1} (u(x) - u(y) - F(x,y)) = u(x_0) - u(y_0) - F(x_0,y_0) := w(x_0,y_0) > 0$$

is attained at an interior point with $x_0 \neq y_0$.

The p-Laplacian, II

Write

$$\begin{aligned}\eta := \frac{D_x G(x_0,y_0)}{|D_x G(x_0,y_0)|} &= \frac{Du(x_0)}{|Du(x_0)|} \\ &= \frac{D_x f(x_0,y_0)}{|D_x f(x_0,y_0)|} = \frac{x_0-y_0}{|x_0-y_0|} = -\frac{D_y f(x_0,y_0)}{|D_y f(x_0,y_0)|} \\ &= -\frac{D_y G(x_0,y_0)}{|D_y G(x_0,y_0)|} = \frac{Du(y_0)}{|Du(y_0)|}.\end{aligned}$$

Now it holds that

$$\begin{pmatrix} D^2u(x_0) & 0 \\ 0 & -D^2u(y_0)\end{pmatrix} \leq D^2F(x_0,y_0).$$

Notice that for $(x,y)=(x_0,y_0)$ we have $P=\eta\otimes\eta$, where P is the reflection matrix. The equation in $\mathbb{R}^n$ is

$$0 = \operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} I+(p-2)\eta\otimes\eta & 0 \\ 0 & I+(p-2)\eta\otimes\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^2u(x_0) & 0 \\ 0 & D^2u(y_0)\end{pmatrix}\right\}$$

The p-Laplacian, III

As before

$$0 = \mathrm{tr}\left\{ \begin{pmatrix} I + (p-2)\eta \otimes \eta & B \\ B & I + (p-2)\eta \otimes \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^2 u(x_0) & 0 \\ 0 & D^2 u(y_0) \end{pmatrix} \right\}$$

for many matrix B such that

$$\begin{pmatrix} I + (p-2)\eta \otimes \eta & B \\ B & I + (p-2)\eta \otimes \eta \end{pmatrix} \geq 0.$$

Taking $B = I - p\eta \otimes \eta$

$$0 \leq \mathrm{tr}\left\{ \begin{pmatrix} I + (p-2)\eta \otimes \eta & I - p\eta \otimes \eta \\ I - p\eta \otimes \eta & I + (p-2)\eta \otimes \eta \end{pmatrix} D^2 F(x_0, y_0) \right\} < 0.$$

Gracias

Muchas gracias por vuestra atención.

REFERENCIA:

Connections between Coupling and Ishii-Lions Methods for Tug-of-War Games with Noise, by Riku Antilla, Juan J. Manfredi, and Mikko Parviainen.

Available at arXiv.org.
`manfredi@pitt.edu`