# Control y propiedad de turnpike

**Sebastián Zamorano**

Universidad de Deusto
Abril 2025

# Contenidos



Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

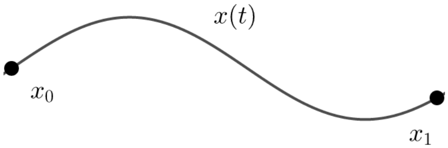
# Contenidos



Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

## Controlabilidad

El problema de controlabilidad puede ser formulado como sigue. *Consideremos un sistema de evolución (descrito por una EDO o una EDP). Tenemos permitido actuar sobre las trajectorias del sistema mediante un control adecuado (fuerza externa, condición de frontera, etc.). Entonces, dado un intervalo de tiempo* $t \in (0, T)$, *estados inicial y final, queremos encontrar un control tal que la solución coincida con el estado inicial al tiempo* $t = 0$ *y al estado final al tiempo* $t = T$.



# Controlabilidad

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) & t \in (0,T) \\ x(0) = x_0 & , \end{cases}$$

donde

- $A$ es una matriz real de tamaño $n \times n$.
- $B$ es una matriz real de tamaño $n \times m$.
- $x_0$ un vector en $\mathbb{R}^n$.
- $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ representa el estado.
- $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ es la función de control.

# Controlabilidad

- Dado un dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y una función vectorial $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, el sistema (1) tiene una única solución $x \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$, la cual viene dada por

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Controlabilidad

- Dado un dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y una función vectorial $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, el sistema (1) tiene una única solución $x \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$, la cual viene dada por

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

## Definición

Diremos que el sistema (1) es exactamente controlable en tiempo $T > 0$ si para cualquier estado inicial y final $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (1) satisface

$$x(T) = x_1.$$

# Controlabilidad

Definamos el siguiente conjunto denominado conjunto de estados alcanzables

$$R(T, x_0) := \{x(T) \in \mathbb{R}^n \ : \ x \text{ es solución de } (1) \text{ con } u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)\}.$$

- Controlabilidad exacta es equivalente a $R(T, x_0) = \mathbb{R}^n$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

# Controlabilidad

Definamos el siguiente conjunto denominado conjunto de estados alcanzables

$$R(T, x_0) := \{x(T) \in \mathbb{R}^n \ : \ x \text{ es solución de } (1) \text{ con } u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)\}.$$

- Controlabilidad exacta es equivalente a $R(T, x_0) = \mathbb{R}^n$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

### Definición

Diremos que el sistema (1) es controlable a cero en tiempo $T > 0$ si dado cualquier dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$x(T) = 0.$$

# Observabilidad

- La propiedad de controlabilidad exacta y a cero, están relacionadas con una desigualdad para el correspondiente sistema adjunto. Esta se llama *desigualdad de observabilidad*.
- Sea $A^*$ la matriz adjunta de $A$, i.e. la matriz que satisface $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Consideremos el siguiente sistema homogéneo adjunto

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^*\varphi(t) & t \in (0,T) \\ \varphi(T) = \varphi_T & . \end{cases} \tag{2}$$

# Observabilidad

**Lema**

El dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llevado a cero en tiempo $T > 0$ usando un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ ssi

$$\int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt + \langle x_0, \varphi(0) \rangle = 0,$$

para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, $\varphi$ la correspondiente solución de (2).

# Observabilidad

**Lema**

El dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llevado a cero en tiempo $T > 0$ usando un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ ssi

$$\int_0^T \langle u, B^*\varphi \rangle dt + \langle x_0, \varphi(0) \rangle = 0,$$

para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, $\varphi$ la correspondiente solución de (2).

- Lo anterior se puede ver como la condición de optimalidad para los puntos críticos del funcional cuadrático $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^*\varphi|^2 dt + \langle x_0, \varphi(0) \rangle,$$

donde $\varphi$ es la solución de (2) con dato inicial $\varphi_T$.

**Lema**

Supongamos que $J$ alcanza su mínimo en $\widehat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ y sea $\widehat{\varphi}$ la solución del problema adjunto (2) con dato inicial $\widehat{\varphi}_T$. Entonces

$$u = B^* \widehat{\varphi}$$

es un control a cero para el sistema (1) con dato inicial $x_0$.

### Lema

Supongamos que $J$ alcanza su mínimo en $\widehat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ y sea $\widehat{\varphi}$ la solución del problema adjunto (2) con dato inicial $\widehat{\varphi}_T$. Entonces

$$u = B^* \widehat{\varphi}$$

es un control a cero para el sistema (1) con dato inicial $x_0$.

### Definición

El sistema (2) se dice que es observable en tiempo $T > 0$, si existe una constante positiva $C > 0$ tal que

$$\int_0^T |B^* \varphi|^2 dt \geq C |\varphi(0)|^2,$$

para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, $\varphi$ la correspondiente solución de (2).

# Dualidad

**Teorema**

El sistema (1) es controlable a cero ssi el sistema (2) es observable.

# Dualidad

### Teorema

El sistema (1) es controlable a cero ssi el sistema (2) es observable.

### Proposición

La desigualdad de observabilidad es equivalente al siguiente principio de continuación única:

$$B^*\varphi(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad \Rightarrow \quad \varphi_T = 0.$$

Deusto Universidad de Deusto Deustuko Unibertsitatea University of Deusto

# Controlabilidad ecuación del calor fraccionaria

$$
(3) \qquad \begin{cases} \partial_t u + (-\partial_x^2)^s u = 0 & \text{en } (-1,1)\times(0,T), \\ u = g\chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} & \text{en } (\mathbb{R}\setminus(-1,1))\times(0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{en } (-1,1). \end{cases}
$$

- Queremos analizar la posibilidad de encontrar una función $g$ localizada en un subconjunto $\mathcal{O}$ en el exterior del intervarlo $(-1,1)$ tal que el sistema (3) sea controlable a cero en tiempo $T > 0$.

# Resultado principal

### Teorema

Sea $0 < s < 1$ y sea $\mathcal{O} \subset (\mathbb{R} \setminus (-1,1))$ un conjunto abierto arbitrario. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\frac{1}{2} < s < 1$, entonces el sistema (3) es controlable a cero en cualquier tiempo $T > 0$.

(b) Si $0 < s \leq \frac{1}{2}$, entonces el sistema (3) no es controlable al tiempo $T > 0$.

(b) Si $\frac{1}{2} < s < 1$, entonces el sistema (3) es exactamente controlable a trayectoría al tiempo $T > 0$.

# Problema adjunto

$$
(4) \qquad \begin{cases} -\partial_t \psi + (-\partial_x^2)^s \psi = 0 & \text{en } (-1,1) \times (0,T), \\ \psi = 0 & \text{en } (\mathbb{R} \setminus (-1,1)) \times (0,T), \\ \psi(\cdot, T) = \psi_0 & \text{en } (-1,1), \end{cases}
$$

- Al igual que en EDO, queremos probar la desigualdad de observabilidad para el problema (4).

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Problema adjunto

$$
(4) \qquad \begin{cases} -\partial_t \psi + (-\partial_x^2)^s \psi = 0 & \text{en } \ (-1,1)\times(0,T), \\ \psi = 0 & \text{en } \ (\mathbb{R}\setminus(-1,1))\times(0,T), \\ \psi(\cdot,T) = \psi_0 & \text{en } \ (-1,1), \end{cases}
$$

- Al igual que en EDO, queremos probar la desigualdad de observabilidad para el problema (4).
- Para ello necesitamos establecer quién es $B^*$

# Nonlocal normal derivative

- *La derivada normal no–local* $\mathcal{N}_s$ viene dada por

$$\mathcal{N}_s u(x) := C_s \int_{(-1,1)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1),$$

donde $C_s$ es la constante dada en la definición del Laplaciano fraccionario.

[1] M. Warma. Approximate controllability from the exterior of space-time fractional diffusion equations with the fractional Laplacian. *Applied Mathematics & Optimization*, 2018

# Nonlocal normal derivative

- *La derivada normal no–local* $\mathcal{N}_s$ viene dada por

$$\mathcal{N}_s u(x) := C_s \int_{(-1,1)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1),$$

  donde $C_s$ es la constante dada en la definición del Laplaciano fraccionario.

- Principio de continuación única [1]:

**Lema (Warma 2018)**

Sea $\lambda > 0$ un número real y $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ un conjunto abierto no vacío. Si $\varphi \in D((-\Delta)^s_D)$ satisface

$$(-\Delta)^s_D \varphi = \lambda\varphi \ \text{ en } \ (-1,1) \ \text{ y } \ \mathcal{N}_s\varphi = 0 \ \text{ en } \ \mathcal{O}, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

[1] M. Warma. Approximate controllability from the exterior of space-time fractional diffusion equations with the fractional Laplacian. *Applied Mathematics & Optimization*, 2018

# Observabilidad

**Teorema**

El sistema (3) es controlable a cero ssi el sistema (4) es observable.

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Observabilidad

**Teorema**

El sistema (3) es controlable a cero ssi el sistema (4) es observable.

**Teorema**

El sistema (4) es observable. Es decir, existe una contante positiva $C > 0$ tal que

$$\|\psi(\cdot,0)\|^2_{L^2(-1,1)} \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\mathcal{N}_s \psi(x,t)|^2 \, dxdt.$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# La ecuación de Moore–Gibson–Thompson

$$
(5) \qquad \begin{cases} \tau y_{ttt} + \alpha y_{tt} - c^2 \Delta y - b \Delta y_t = F(t, y, y_t, y_{tt}) & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ y(x,0) = y_0, \;\; y_t(x,0) = y_1, \;\; y_{tt}(x,0) = y_2 & x \in \Omega. \end{cases}
$$

- $\tau > 0$: tiempo de relajación.
- $c$: velocidad del sonido.
- $b = \delta + \tau c^2 \geq 0$: $\delta$ es la difusividad del sonido.

# Consecuencias

- El término de damping $-b\Delta y_t$ es esencial para el buen planteo de la ecuación ($b > 0$).

# Consecuencias

- El término de damping $-b\Delta y_t$ es esencial para el buen planteo de la ecuación $(b > 0)$.

- El espectro posee puntos de acumulación.

# Consecuencias

- El término de damping $-b\Delta y_t$ es esencial para el buen planteo de la ecuación ($b > 0$).
- El espectro posee puntos de acumulación.
- La ecuación MGT puede verse como una ecuación de onda con amortiguamiento viscoso $\gamma z_t$ acoplado con una EDO.

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Consecuencias

- El término de damping $-b\Delta y_t$ es esencial para el buen planteo de la ecuación $(b > 0)$.
- El espectro posee puntos de acumulación.
- La ecuación MGT puede verse como una ecuación de onda con amortiguamiento viscoso $\gamma z_t$ acoplado con una EDO.
- Existen rayos verticales en la variable espacio-tiempo $(x, t)$ que no se propagan en absoluto en la variable espacio $x$, lo que también hace que el estudio del control y observabilidad sea imposible en un subconjunto cilíndrico $\omega \times (0, T) \subset \Omega \times (0, T)$.

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Consecuencias

- El término de damping $-b\Delta y_t$ es esencial para el buen planteo de la ecuación $(b > 0)$.
- El espectro posee puntos de acumulación.
- La ecuación MGT puede verse como una ecuación de onda con amortiguamiento viscoso $\gamma z_t$ acoplado con una EDO.
- Existen rayos verticales en la variable espacio-tiempo $(x, t)$ que no se propagan en absoluto en la variable espacio $x$, lo que también hace que el estudio del control y observabilidad sea imposible en un subconjunto cilíndrico $\omega \times (0, T) \subset \Omega \times (0, T)$.

# Condición de control geométrico en movimiento

### MGCC

Se dice que un conjunto abierto $U \subset \overline{\Omega} \times (0, T)$ satisface MGCC si

- Todos los rayos de la óptica geométrica de la ecuación de onda entran en $U$ antes del tiempo $T$.
- Para todo $x_0 \in \Omega$, la línea vertical $\{(x_0, s) : s \in \mathbb{R}\}$ ingresa a $U$ antes del tiempo $T$.

### Teorema

Sea $T > 0$ tal que $\omega$ satisface MGCC y $\gamma = \alpha - \frac{\tau c^2}{b} \geq 0$. Entonces, para todo $(y_0, y_1, y_2) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, existe un control $u \in L^2(\omega)$ tal que la solución de

$$\begin{cases} \tau y_{ttt} + \alpha y_{tt} - c^2 \Delta y - b \Delta y_t = u\chi_{\omega(t)} & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ y(x,0) = y_0, \quad y_t(x,0) = y_1, \quad y_{tt}(x,0) = y_2 & x \in \Omega. \end{cases}$$

satisface

$$y(x,T) = y_t(x,T) = y_{tt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

# Otros modelos

- Ecuación viscosa de van Wijngaarden-Eringen

$$y_{tt} - [1 - 2\varepsilon(\beta - 1)y_t]y_{xx} + \varepsilon \cdot (y_{xx}^2)_{tt} = (Re)^{-1} y_{xxt} + a_0^2 y_{xxtt}$$

# Otros modelos

- Ecuación viscosa de van Wijngaarden-Eringen

$$y_{tt} - [1 - 2\varepsilon(\beta - 1)y_t]y_{xx} + \varepsilon \cdot (y_{xx}^2)_{tt} = (Re)^{-1} y_{xxt} + a_0^2 y_{xxtt}$$

- Ecuación de ondas con damping fuerte semi-discreta

$$\begin{cases} y_i'' - \dfrac{1}{h^2}[y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i] - \dfrac{\varepsilon}{h^2}[y_{i+1}' + y_{i-1}' - 2y_i'] = \mathcal{D}_\omega u_i(t), & i \in \{1, \dots, N\},\ t \in (0, T), \\ y_0(t) = 0,\ y_{N+1}(t) = g(t), & t \in (0, T), \\ y_i(0) = y_i^0,\ y_i'(0) = y_i^1, \end{cases}$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Tracking control

Consideramos una EDO lineal

$$(6) \qquad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) & t \in (0, T), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Tracking control

Consideramos una EDO lineal

$$
\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad t \in (0, T), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{6}
$$

### Definición

Sea $T > 0$ y $E \in \mathbb{R}^{p\times n}$ la matriz de salida, para algún $p \in \{1, \dots, n\}$. El sistema (6) se dice que es ***E*-tracking controllable** si para cualquier objetivo de salida $f \in H^1(0, T; \mathbb{R}^p)$ y condiciones iniciales $x_0 \in \mathbb{R}^n$, bajo la condición de compatibilidad $f(0) = Ex_0$, existe una función de control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución $x \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ de (6) satisface

$$
Ex(t) = f(t), \quad \forall t \in [0, T].
$$

Cuando existe tal control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ se dice que la función objetivo de salida $f$ es $E$-alcanzable o $E$-seguible.

# Controlabilidad

- Ecuación adjunta

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^*\varphi(t) + E^*g(t) \quad t \in (0,T), \\ \varphi(T) = 0. \end{cases}$$

# Controlabilidad

- Ecuación adjunta

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^*\varphi(t) + E^*g(t) & t \in (0,T), \\ \varphi(T) = 0. \end{cases}$$

### Definición

El sistema anterior se dice tracking observable si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|g\|^2_{H^{-1}(0,T;\mathbb{R}^p)} \leq C\|B^*\varphi\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} = C\left\|\int_t^T B^* e^{A^*(s-t)}E^*g(s)ds\right\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)},$$

para todo $g \in H^{-1}(0,T;\mathbb{R}^n)$ y $\varphi$ la única solución por transposición del sistema.

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Consecuencias

- Nótese que, a diferencia de la teoría de control clásica para ecuaciones diferenciales ordinarias, la siguiente propiedad de continuación única para la solución del sistema adjunto es insuficiente para lograr la observabilidad/controlabilidad tracking:

$$B^*\varphi(t) = 0 \ \forall t \in [0, T] \text{ implica } \ g \equiv 0.$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Consecuencias

- Nótese que, a diferencia de la teoría de control clásica para ecuaciones diferenciales ordinarias, la siguiente propiedad de continuación única para la solución del sistema adjunto es insuficiente para lograr la observabilidad/controlabilidad tracking:

$$B^*\varphi(t) = 0 \;\forall t \in [0, T] \text{ implica } \; g \equiv 0.$$

- En efecto, mientras que la desigualdad de observabilidad implica inmediatamente esta propiedad de continuación única, la inversa no es cierta, debido a la dimensionalidad infinita del problema.

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Consecuencias

- Nótese que, a diferencia de la teoría de control clásica para ecuaciones diferenciales ordinarias, la siguiente propiedad de continuación única para la solución del sistema adjunto es insuficiente para lograr la observabilidad/controlabilidad tracking:

$$B^*\varphi(t) = 0 \; \forall t \in [0, T] \text{ implica } \; g \equiv 0.$$

- En efecto, mientras que la desigualdad de observabilidad implica inmediatamente esta propiedad de continuación única, la inversa no es cierta, debido a la dimensionalidad infinita del problema.
- Por el contrario, en el contexto de control de estado finito-dimensional la equivalencia de estos conceptos proviene de la equivalencia de normas en espacios finito-dimensionales. Este fenómeno es análogo al contexto clásico de controlabilidad de problemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) infinito-dimensionales, donde la propiedad de continuación única no basta para obtener desigualdades de observabilidad cuantitativas.

# Contenidos



Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Propiedad de Turnpike

- El origen del término turnpike es debido a Robert Dorfman, Paul Samuelson y Rober Solow en el libro 'Linear Programming and Economics Analysis (1958), para referirse a una autopista (highway).

# Propiedad de Turnpike

- El origen del término turnpike es debido a Robert Dorfman, Paul Samuelson y Rober Solow en el libro 'Linear Programming and Economics Analysis (1958), para referirse a una autopista (highway).

- Los autores interpretaron este concepto a: supongamos que queremos ir de una ciudad A a una ciudad B en auto, la mejor forma de hacer esto, la opción óptima, es tomar la autopista (turnpike) lo más cercano a A, y salir de la autopista lo más cercano a B. Es decir, la autopista de peaje.

# Propiedad de Turnpike

- El origen del término turnpike es debido a Robert Dorfman, Paul Samuelson y Rober Solow en el libro 'Linear Programming and Economics Analysis (1958), para referirse a una autopista (highway).

- Los autores interpretaron este concepto a: supongamos que queremos ir de una ciudad A a una ciudad B en auto, la mejor forma de hacer esto, la opción óptima, es tomar la autopista (turnpike) lo más cercano a A, y salir de la autopista lo más cercano a B. Es decir, la autopista de peaje.

- Siempre existe la ruta más rápida entre dos puntos.

# Propiedad de Turnpike

- El origen del término turnpike es debido a Robert Dorfman, Paul Samuelson y Rober Solow en el libro 'Linear Programming and Economics Analysis (1958), para referirse a una autopista (highway).

- Los autores interpretaron este concepto a: supongamos que queremos ir de una ciudad A a una ciudad B en auto, la mejor forma de hacer esto, la opción óptima, es tomar la autopista (turnpike) lo más cercano a A, y salir de la autopista lo más cercano a B. Es decir, la autopista de peaje.

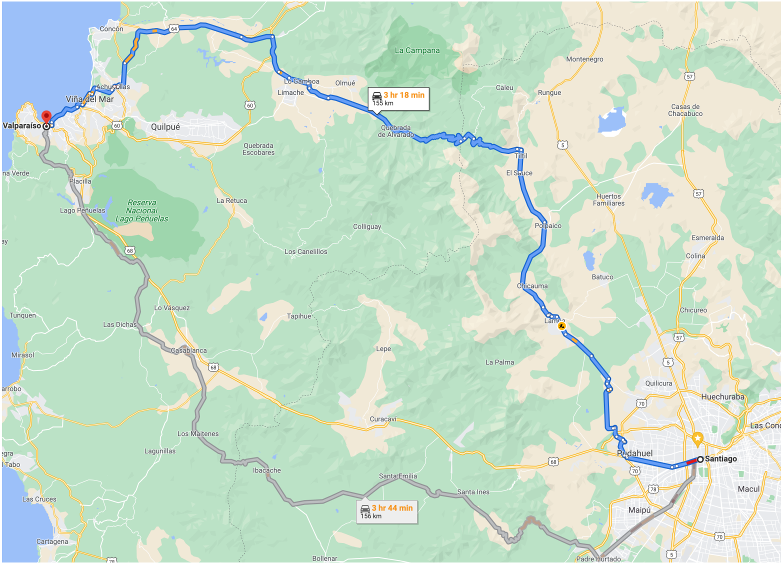
- Siempre existe la ruta más rápida entre dos puntos.

- Si el origen y el destino están cercanos y lejos de la autopista, la mejor ruta puede ser no tocar la autopista.

# Propiedad de Turnpike

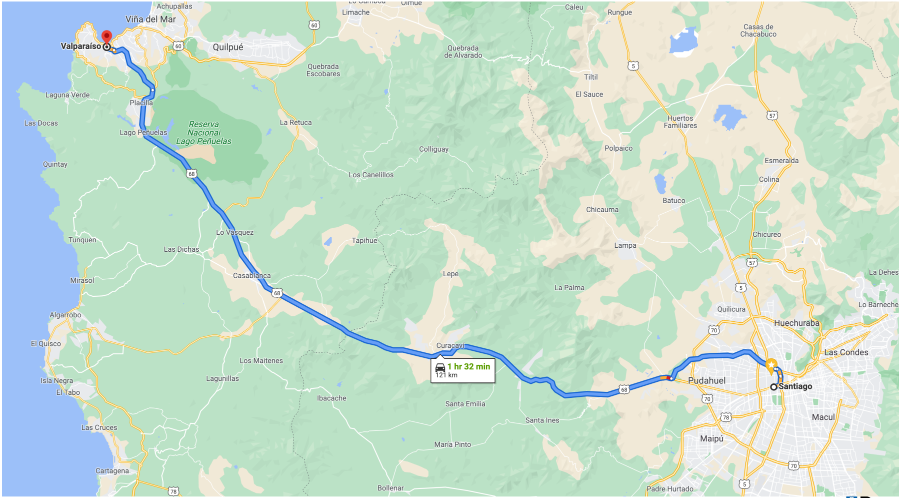
- El origen del término turnpike es debido a Robert Dorfman, Paul Samuelson y Rober Solow en el libro 'Linear Programming and Economics Analysis (1958), para referirse a una autopista (highway).
- Los autores interpretaron este concepto a: supongamos que queremos ir de una ciudad A a una ciudad B en auto, la mejor forma de hacer esto, la opción óptima, es tomar la autopista (turnpike) lo más cercano a A, y salir de la autopista lo más cercano a B. Es decir, la autopista de peaje.
- Siempre existe la ruta más rápida entre dos puntos.
- Si el origen y el destino están cercanos y lejos de la autopista, la mejor ruta puede ser no tocar la autopista.
- Sin embargo, si el origen y el destino están lo suficientemente lejos, siempre valdrá la pena tomar la autopista de peaje y cubrir la distancia al mejor ritmo de viaje, incluso si esto significa agregar un poco de kilometraje en cada extremo.

# Motivación




Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Motivación


Viña del Mar
Valparaíso
Quilpué
Limache
Laguna Verde
Placilla
Las Docas
Lago Peñuelas
Reserva Nacional Lago Peñuelas
Quintay
La Retuca
Colliguay
Los Canelillos
Lo Vásquez
Tapihue
Tunquen
Las Dichas
Casablanca
Mirasol
Algarrobo
El Quisco
Isla Negra
El Tabo
Las Cruces
Cartagena
Los Maitenes
Lagunillas
Ibacache
Curacaví
1 hr 32 min
121 km
Santa Emilia
María Pinto
Bollenar
Lepe
La Palma
Santa Ines
Caleu
Rungue
Tiltil
El Sauce
Polpaico
Huertos Familiares
Casas de Chacabuco
Esmeralda
Colina
Batuco
Chicauma
Lampa
Chicureo
Quilicura
Huechuraba
Pudahuel
Santiago
Las Condes
Macul
Maipú
Padre Hurtado
Lo Barneche
Quebrada de Alvarado
Quebrada Escobares
Achupallas

# Motivación

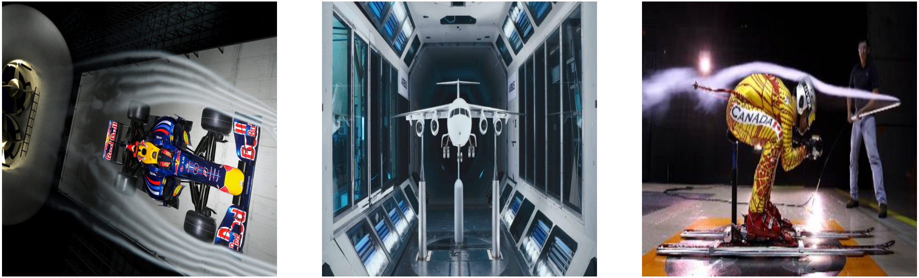



Figure: Túnel de viento

# Problema de Control Óptimo

Consideremos la dinámica

$$(7) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

y el siguiente problema de control ópitmo

$$\min_u J^T(u) := \int_0^T f^0(x(t), u(t))dt, \qquad x \text{ solución de } (7).$$

De manera analoga, consideramos el problema estacionario

$$\min_u J_s(u) := f^0(x, u), \qquad \text{sujeto a } f(x, u) = 0.$$

Supongamos que $J^T$ y $J_s$ admiten un único control óptimo $u^T, u^S$ (y estado $x^T, x^s$).

El problema a estudiar es el siguiente:

El problema a estudiar es el siguiente:

Analizar la convergencia de las trayectorias y controles que son óptimos en $[0, T]$ hacia el estado estacionario y control que son óptimos para el régimen estacionario correspondiente.

El problema a estudiar es el siguiente:

Analizar la convergencia de las trayectorias y controles que son óptimos en $[0, T]$ hacia el estado estacionario y control que son óptimos para el régimen estacionario correspondiente.

Matemáticamente

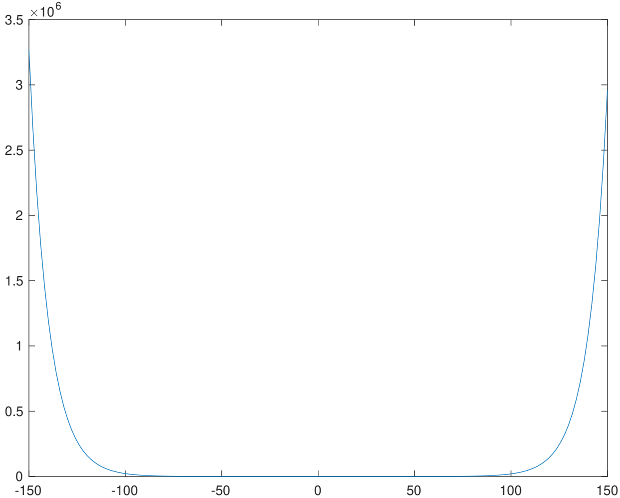
- La propiedad de turnpike establece que, cuando planteamos un problema de control óptimo en un intervalo de tiempo grande, la gran parte del tiempo el control y el estado óptimo permanecen exponencialmente cercas del correspondiente estado y control óptimo estacionario.

- Encontrar dos constantes $C, \delta > 0$, independientes de $T$, tales que
$$\|x^T(t) - x^s\|_X^2 + \|u^T(t) - u^s\|_U^2 \leq C(e^{-\delta t} + e^{-\delta(T-t)}), \quad \forall t \in (0, T).$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

- Encontrar dos constantes $C, \delta > 0$, independientes de $T$, tales que

$$\|x^T(t) - x^s\|_X^2 + \|u^T(t) - u^s\|_U^2 \leq C(e^{-\delta t} + e^{-\delta(T-t)}), \quad \forall t \in (0, T).$$



# Turnpike: caso Robin

Consideremos el siguiente problema de control óptimo exterior:

$$\min_{g \in U} J^T(g) := \frac{1}{2}\int_0^T \|u - u^d\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|g(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \mu)} dt,$$

where

$$J^T(g) := \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |u - u^d|^2 dx dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|g(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \mu)} dt,$$

sujeto a que $u$ soluciona

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \mathcal{N}_s u + \beta u = \beta g & \text{en } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Teoremas principales

### Teorema

Sea $(u^T, g^T, \psi^T)$ la solución del sistema de optimalidad y $(\overline{u}, \overline{g}, \overline{\psi})$ la solución del sistema de optimalidad estacionario. Entonces,

$$\frac{1}{T}\int_0^T g^T\, dt \quad \longrightarrow \quad \overline{g}, \quad \text{fuerte en } L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \mu) \text{ as } T \to +\infty,$$

y

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^T\, dt \quad \longrightarrow \quad \overline{u}, \quad \text{fuerte en } L^2(\Omega) \text{ as } T \to +\infty.$$

**Teorema (M. Warma and S.Z. (ESAIM–COCV 2021))**

Sea $\gamma \geq 0$ un número real. Existe una constante $C = C(\gamma) > 0$ (independiente de $T$) tal que para todo $t \in [0, T]$ se tiene

$$\|u^T(\cdot,t) - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi^T(\cdot,t) - \overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(e^{-\gamma t} + e^{-\gamma(T-t)}\right)\left(\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Turnpike: caso Dirichlet

Consideremos el siguiente problema de control óptimo exterior:

$$\min_{g \in U} J^T(g) := \frac{1}{2}\int_0^T \|u - u^d\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|g(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} dt,$$

where

$$J^T(g) := \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |u - u^d|^2 dx dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|g(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \mu)} dt,$$

sujeto a que $u$ soluciona

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = g & \text{en } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

# Turnpike: caso Dirichlet

Consideremos el siguiente problema de control óptimo exterior:

$$\min_{g\in U} J^T(g) := \frac{1}{2}\int_0^T \|u-u^d\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|g(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)}dt,$$

where

$$J^T(g) := \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |u-u^d|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \|g(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega,\mu)}dt,$$

sujeto a que $u$ soluciona

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = 0 & \text{en } \Omega\times(0,T),\\ u = g & \text{en } (\mathbb{R}^N\setminus\Omega)\times(0,T),\\ u(\cdot,0)=0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

En este cao $U = L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega))$.

## Teorema

Sea $\gamma \geq 0$un número real. Sea $(u^T, g^T, \lambda^T)$ la solución del sistema de optimalidad y $(\overline{u}, \overline{g}, \overline{\lambda})$ la correspondiente solución del sistema de optimalidad estacionario. Entonces, existe $C = C(\gamma) > 0$ (independiente de $T$) tal que para todo $t \in [0, T]$ tenemos

$$\|u^T(\cdot, t) - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda^T(\cdot, t) - \overline{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(e^{-\gamma t} + e^{-\gamma(T-t)}\right)\left(\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\overline{\lambda}\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Además,

$$\left\|\frac{1}{e^{-\gamma t} + e^{-\gamma(T-t)}}(u^T - \overline{u})\right\|_{L^2((0,T);H_0^s(\Omega))} + \left\|\frac{1}{e^{-\gamma t} + e^{-\gamma(T-t)}}(g^T - \overline{g})\right\|_{L^2((0,T);L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Omega))} + \left\|\frac{1}{e^{-\gamma t} + e^{-\gamma(T-t)}}(\lambda^T - \overline{\lambda})\right\|_{L^2((0,T);H_0^s(\Omega))} \leq C\left(\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\overline{\lambda}\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

# EDOS con coeficientes aleatorios

- Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$y tres matrices aleatorias $A, C \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, constantes en tiempo, las cuales representan el coeficiente aleatorio de la ecuación, la observación aleatoria y el control aleatorio, respectivamente.

# EDOS con coeficientes aleatorios

- Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$y tres matrices aleatorias $A, C \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, constantes en tiempo, las cuales representan el coeficiente aleatorio de la ecuación, la observación aleatoria y el control aleatorio, respectivamente.

- Consideremos el siguiente problema de control óptimo

$$\min_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \left\{ J^T(u) = \frac{1}{2} \left( \int_0^T \|u(t)\|^2_{\mathbb{R}^m} dt + \int_0^T \|C(\cdot)x(t,\cdot) - z\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} dt \right) \right\}$$

# EDOS con coeficientes aleatorios

- Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$y tres matrices aleatorias $A, C \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ y $B \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, constantes en tiempo, las cuales representan el coeficiente aleatorio de la ecuación, la observación aleatoria y el control aleatorio, respectivamente.

- Consideremos el siguiente problema de control óptimo

$$\min_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \left\{ J^T(u) = \frac{1}{2} \left( \int_0^T \|u(t)\|^2_{\mathbb{R}^m} dt + \int_0^T \|C(\cdot)x(t,\cdot) - z\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} dt \right) \right\}$$

sujeto a que $x$ es solución del problema

$$\begin{cases} x_t + A(\omega)x = B(\omega)u & t \in (0, T), \\ x(0, \omega) = x_0(\omega). \end{cases}$$

Deusto
Universidad de Deusto
Deustuko Unibertsitatea
University of Deusto

# Ecuaciones cuasi periódicas

Recordemos ahora el conocido concepto de función casi periódica

### Definición

Sea $g : \mathbb{R} \to H$ una función continua. Dado $\varepsilon > 0$, llamamos $\pi$ a un período $\varepsilon$ para $g$ si y sólo si

$$\|g(t+\pi) - g(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por $\mathcal{V}(g, \varepsilon)$ el conjunto de todos los $\varepsilon$-períodos para $g$. Diremos que $g$ es una función casi periódica si y sólo si el conjunto $\mathcal{V}(g, \varepsilon)$ es relativamente denso en $\mathbb{R}$.

# Ecuaciones cuasi periódicas

Recordemos ahora el conocido concepto de función casi periódica

### Definición

Sea $g : \mathbb{R} \to H$ una función continua. Dado $\varepsilon > 0$, llamamos $\pi$ a un período $\varepsilon$ para $g$ si y sólo si

$$\|g(t+\pi) - g(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por $\mathcal{V}(g, \varepsilon)$ el conjunto de todos los $\varepsilon$-períodos para $g$. Diremos que $g$ es una función casi periódica si y sólo si el conjunto $\mathcal{V}(g, \varepsilon)$ es relativamente denso en $\mathbb{R}$.

Funciones de la forma $g(t) = \sin(t) + \cos(\sqrt{2}t)$, que es una suma de dos funciones puramente periódicas, sirven como ejemplos clásicos de casi periodicidad y extienden de forma natural el concepto de funciones periódicas.

# Ecuaciones cuasi periódicas

Sea $T >> 1$ y consideremos el problema de control óptimo

$$\min_{u\in L^2(0,T;U)} J^T(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \|C(t)(x(t)-x_d(t))\|_V^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|N^{1/2}(t)u(t)\|_U^2 dt,$$

sujeto a la ecuación de estado

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + B(t)u(t) + f(t), & t\in(0,T), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Aquí, $B \in L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(U,H))$, $C \in L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(H,V))$, $V$ es un espacio de Hilbert, y $N \in L^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(U,U))$ es un operador definido positivo invertible. Los tres son operadores $\tau$-periódicos, y $A: D(A)\subset H \to H$ es el generador de un semigrupo analítico $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en $H$ y $i\mathbb{R}\subset\rho(A)$. La función $f \in AP(\mathbb{R};H)$ y $x_d \in AP(\mathbb{R};H)$ ambos son datos arbitrarios cuasi periódicos de modulu $L$.

# El problema turnpike

En este caso, siendo el término de seguimiento una función casi periódica, tratamos el turnpike como un problema casi periódico.

# El problema turnpike

En este caso, siendo el término de seguimiento una función casi periódica, tratamos el turnpike como un problema casi periódico.A saber, consideramos el problema de control óptimo casi periódico de módulo $L$:

$$\min_{u \in L^2_{ap}(\mathbb{R};U)} J^L(u) = \frac{1}{2}\|C(x - x_d)\|^2_{\mathcal{V}} + \frac{1}{2}\|N^{1/2}u\|^2_{\mathcal{U}},$$

sujeto al estado inicial en reposo $x = x(t)$, que resuelve el siguiente sistema

$$x'(t) = Ax(t) + B(t)u(t) + f(t). \tag{8}$$


GRAZAS
DANKIE
QUJAN
THANK YOU
QUJANARSUAQ
TODA
TAKK
MERCI
XIE XIE
THANK YOU
DANKIE
THANKS
TAKK
ASANTE
GRAZAS
MAHALO
THANK YOU
GRACIAS
OBRIGADO
APACHE
TODA
MITELA
ASANTE
XIE XIE
多謝
PAXMAT
THANK YOU
СПАСИБО
ДЗЯКУЙ
XIE XIE
MITELA
SPASIBO
KIITOS
ДЯКУЮ
TAKK
DANKE
ДЗЯКУЙ
HVALA
PAXMET!
多謝
GRAZIE
DEKUJI
唔該
DO JEH
TESEKKÜR EDERIM
KIITOS
TODA
SPAS
FOOLE TUNK
THANK YOU
XIE XIE
धन्यवाद
CHOKRAN
SHUKRAN
SUKRIA
ASANTE
DANKIE
SPAS
WILIWNI
BAIE DANKIE
NGIYABONGA
FAKAAUE
NGIYABONGA
HVALA
SUKRIA
MERCI
OBRIGADA
THANK YOU
GRACIAS
OBRIGADO
MUCHAS GRACIAS
YEWO
DANKIE
XIE XIE
TODA
THANK YOU
TA
多謝